# FISICA CUANTICA II
# EXAMEN DE JULIO, CUESTIONES

CURSO 2022/2023 3 de Julio de 2023

*Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.*

*Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.*

1[4].- Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano:

$$H = -\hbar\,\lambda\,\sigma_y \ ,$$

siendo $\lambda$ una constante real. En el instante inicial $t = 0$ se encuentra en el estado $|\psi_0\rangle$.

a)¿Para que instantes de tiempo $t = \bar{t} > 0$ esta el sistema en un estado que sea ortogonal al estado inicial $|\psi_0\rangle$?.

b) ¿Puede suceder esto para cualquier estado $|\psi_0\rangle$?.

2[3].- En un sistema de dos estados se prepara una mezcla estadistica con un 75% en el estado $|\psi_1\rangle$ y un 25% en el estado $|\psi_2\rangle$, siendo:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \ , \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \ .$$

Obtenganse la matriz densidad de la mezcla y el correspondiente vector de Bloch.

3[3].- Se mide la suma de las componentes $x$ e $y$ del espin de una particula de espin 1/2. ¿Que valores se pueden obtener en dicha medida?.

(2)

Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano

$$H = -\hbar \lambda \sigma_y$$

En el instante inicial $t=0$ se encuentra en el estado $|\psi_0\rangle$. ¿Para que instantes de tiempo $t=\bar{t} \geq 0$ esta el sistema en un estado que sea ortogonal al estado inicial $|\psi_0\rangle$? ¿Puede suceder esto para cualquier estado $|\psi_0\rangle$?

---

El operador de evolucion temporal es

$$U(t) = e^{-i/\hbar H t} = e^{-i/\hbar (-\hbar \lambda \sigma_y) t} = e^{i \lambda \sigma_y t}$$

Es decir

$$\boxed{U(t) = \cos(\lambda t) + i \operatorname{sen}(\lambda t) \sigma_y}$$

Entonces, como $|\psi_0\rangle = |\psi(t=0)\rangle \Rightarrow$

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle = \cos(\lambda t)|\psi_0\rangle + i \operatorname{sen}(\lambda t) \sigma_y |\psi_0\rangle$$

Queremos encontrar un $\bar{t}$ tal que

$$\langle \psi_0 | \psi(\bar{t})\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \psi_0 | \psi(\bar{t})\rangle = \cos(\lambda \bar{t}) \underbrace{\langle \psi_0 | \psi_0\rangle}_{1} + i \operatorname{sen}(\lambda \bar{t}) \langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0\rangle$$

Se tiene que verificar

$$\boxed{\cos(\lambda \bar{t}) + i \operatorname{sen}(\lambda \bar{t}) \langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0\rangle = 0}$$

Pero $\sigma_y^{+} = \sigma_y \Rightarrow \langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow$

3

La igualdad anterior se descompone en dos igualdades (para la parte real y para la parte imaginaria)

$$\rightarrow \cos(\lambda \bar{t}) = 0 \Rightarrow \lambda \bar{t} = (2n+1)\pi/2 \Rightarrow \operatorname{sen}(\lambda \bar{t}) = (-1)^n$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

$$- \underbrace{\operatorname{sen}(\lambda \bar{t})}_{(-1)^n} \langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0 \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0 \rangle = 0}$$

Así pues se tienen que dar las dos condiciones siguientes

$$\boxed{\bar{t} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda}} \qquad \boxed{\langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0 \rangle = 0}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

Especifiquemos la condición que debe de satisfacer el estado inicial $|\psi_0\rangle$. Pongamos

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Como

$$\langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0 \rangle = (a^*, b^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= -i\,(a^*, b^*) \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = -i\,(\underbrace{a^* b - b^* a}_{2i\,\mathrm{Im}(a^* b)})$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \psi_0 | \sigma_y | \psi_0 \rangle = 2\,\mathrm{Im}(a^* b)} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}(a^* b) = 0}$$

No hay fase relativa entre a y b.

(4)

En un sistema de dos estados se prepara una mezcla estadística con un 75% en el estado $|1\rangle$ y un 25% en el estado $|2\rangle$, siendo

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Obtengase la matriz densidad de la mezcla y el vector de Bloch del sistema

---

$$\rho = \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|2\rangle\langle 2| =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1,\ 1) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(1,\ -1) =$$

$$= \frac{3}{8}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/8 & 2/8\\2/8 & 4/8\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\1/4 & 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma_1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma_1\right)}$$

Vector de Bloch $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{b} = (1/2,\ 0,\ 0)}$

5

Se mide la suma de las componentes x e y del espin de una particula de espin $1/2$. ¿Que valores se pueden obtener en dicha medida?

---

Metodo 1

$$S_x + S_y = \hbar/2 \, [\sigma_x + \sigma_y] = \hbar/2 \, \sqrt{2} \, \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Definimos $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \Rightarrow$

$$S_x + S_y = \hbar/2 \, \sqrt{2} \; \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Rightarrow \boxed{S_x + S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}$$

Como $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = 1 \Rightarrow$ Los autovalores de $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \pm 1$

$\Rightarrow$ autovalores de $S_x + S_y = \pm \hbar/\sqrt{2}$

$$\boxed{\text{Resultados posibles} = \pm \hbar/\sqrt{2}}$$

Metodo 2

$$\sigma_x + \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\sigma_x + \sigma_y - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(1-i)(1+i)}_{2} =$$

$$= \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

autovalores de $\hbar/2 \, (\sigma_x + \sigma_y) = \hbar/2 \, (\pm\sqrt{2}) = \pm \hbar/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Resultados posibles} = \pm \hbar/\sqrt{2}}$$